

## Sommaire

### Introduction générale

#### Nombre, mesure et valeur chiffrée

- ▶ Introduction
  - ▶ Notations de nombres pour le calcul et pour la mesure sur deux tablettes de Mésopotamie ancienne
- Un exercice scolaire de la ville de Nippur (dans l'ancien Iraq) - Un texte scolaire provenant de la ville de Mari
- ▶ Héron d'Alexandrie : extraits de La Dioptré
  - ▶ Un traité d'al-Kindī sur les règles parallactiques
  - ▶ Jean Errard de Bar-le-Duc : extraits de sa Géométrie et pratique d'icelle, 1594
  - ▶ Ernst Mach sur la mesure des grandeurs de la mécanique et la théorie des dimensions
  - ▶ La résolution d'un problème de « fabrication de briques » dans un cahier d'élève au XXe siècle

#### Un usage des nombres : produire et utiliser des informations chiffrées

- ▶ Introduction
  - ▶ Le dénombrement de la population au XVIIIe siècle : une lettre de Voltaire à La Michodière, intendant d'Auvergne
  - ▶ Statistiques et représentations graphiques
- William Playfair : extraits des Eléments de statistiques..., 1802 - Charles Dupin : extraits de la publication de son discours du 20 novembre 1826 sur les Effets de l'enseignement populaire... sur les prospérités de la France
- ▶ Statistiques et sciences sociales
- Adolphe Quetelet : extrait « Lettre XX. Reconnaître si une moyenne arithmétique est véritablement moyenne. Type de la taille humaine. » - Émile Durkheim : extrait de Le suicide, 1897

## Introduction

### Le sens des nombres : une question qui n'est pas que théorique

Les nombres nous apparaissent souvent comme l'objet privilégié de la pensée mathématique et philosophique, en raison d'une tradition aussi ancienne que prestigieuse puisqu'elle remonte au moins à l'Antiquité . Ce prestige particulier fait pourtant oublier que les nombres, bien avant qu'ils ne deviennent l'objet de spéculations théologiques ou philosophiques, ont d'abord été l'outil de la pensée scientifique, économique ou qu'ils ont servi à la gestion politique des États anciens et modernes . De manière générale, ils sont restés jusqu'à notre époque un des instruments naturels par lesquels nous appréhendons collectivement la réalité. Les nombres et leur usage ont donc une histoire complexe qui ne se réduit pas à la maîtrise d'une série d'objets idéaux ou théoriques.

Cette « domestication théorique » des nombres a été finalement consacrée par le développement des mathématiques à l'époque contemporaine (XIXe et XXe siècles). C'est alors en effet qu'a été édifée, sur une base théorique sûre, non seulement la construction des différents types de nombres, mais encore l'appréhension théorique des grandeurs continues, qui était depuis l'Antiquité le privilège de la géométrie . Cette recherche moderne d'un ensemble de concepts généraux et plus tard de structures qui puissent légitimer (entre autres choses) « l'usage familier » des nombres ne s'est pas limitée à la seule sphère des recherches les plus avancées en mathématiques. Elle a bientôt investi celle de l'enseignement général et élémentaire au moment des grandes réformes de l'enseignement de la seconde moitié du XXe siècle, notamment celle des « mathématiques modernes » dans les années 1970. Ce qui était consacré par ces réformes était au fond l'idée que l'appréhension des nombres et de leur signification se rapportait au bout du compte à des structures abstraites qui reflétaient les lois familières et « spontanées » de la pensée humaine, qu'on pouvait donc acquérir dès le plus jeune âge .

En gagnant au XIXe siècle un fondement théorique solide, les nombres et le continu retrouvaient le

caractère de non-évidence qui était le leur à l'origine. Cette non-évidence était en effet une des particularités de l'approche des nombres dans la science ancienne puis moderne, avant que les mathématiques ne deviennent une science progressivement spécialisée à partir du XVIII<sup>e</sup> siècle. Les nombres, en effet, n'apparaissaient pas comme « familiers » ou « naturels » mais comme devant faire l'objet d'un apprentissage prolongé et patient. Écrire un nombre, mesurer, dénombrer ou faire un calcul ont été pendant longtemps des actes coûteux en apprentissage, en temps, et surtout en signification. Pour cette même raison, ils n'étaient pas accessibles à tout un chacun ni à tous les corps de métier : cette institutionnalisation relative, ainsi que le fait que certaines compétences étaient la marque visible d'une expertise particulière, expliquent probablement que les nombres et leurs usages soient alors restés chose étrange et non une pratique commune. En outre, ces pratiques n'avaient pas en général une visée théorique « propre » mais devaient se comprendre en lien à différentes sphères d'activités, depuis l'arpentage ou le commerce jusqu'à la politique ou l'économie, en passant par les sciences expérimentales. Dans chacune de ces sphères, les nombres n'étaient qu'une façon parmi d'autres d'appréhender la réalité. Le caractère non évident des nombres et de leur usage n'avait donc pas à être « restitué », comme ce sera le cas au XIX<sup>e</sup> siècle, à partir de recherches théoriques approfondies sur des nombres qui étaient déjà devenus familiers : il venait plus simplement de conditions historiques et sociales très différentes des nôtres.

C'est cette histoire ancienne, sans laquelle l'histoire plus récente (et bien étudiée) de la fondation théorique des nombres est difficilement compréhensible, que cette brochure invite à découvrir. Si nous parlons donc ici du « sens des nombres », c'est en référence directe à des usages qui ne sont pas dissociables d'un contexte culturel, social et politique.

### **Une question d'actualité dans la société contemporaine**

Étudier cette histoire longue du « sens des nombres » ainsi compris est devenu aujourd'hui un enjeu majeur pour les sociétés modernes ayant traversé la 'révolution industrielle' puis celle de l'information. Ces deux révolutions contemporaines ont en effet créé les conditions d'un certain nombre de débats qui étaient impensables avant elles. Notre monde, en effet, est aujourd'hui saturé de nombres et de données chiffrées, au point que le sens, la construction et l'origine de ces derniers finissent par être obliés ou par passer inaperçus. Cet usage omniprésent courant et pour ainsi dire « automatique » est lié à l'élaboration de dispositifs efficaces de mesure et de « traduction chiffrée » de toutes sortes de réalités, naturelles ou humaines. Ces dispositifs engendrent des myriades de données dont la présence et la production ne font plus guère question que pour quelques spécialistes attentifs et avertis. Dans la sphère publique, la simple difficulté d'expliquer en permanence le fonctionnement de ces « boîtes noires » qui engendrent des nombres ne permet pas de les communiquer avec toute la prudence qui serait requise en principe, ni de préparer les esprits à les interpréter. Ce phénomène n'est pas nécessairement volontaire, il est concomitant du fonctionnement d'une société fondée sur une communication généralisée, rapide et efficace. Dans certains cas, il devient au contraire le produit volontaire de la rhétorique journalistique, politique ou scientifique. Cette dernière comprend désormais, parmi ses outils, la manipulation d'informations chiffrées qui sont d'autant plus importantes qu'elles jouent un rôle dans toutes sortes de décisions politiques. Dans tous les cas, il s'agit là d'aspects devenus inévitables dans les sociétés modernes de l'industrie et de l'information de masse.

Par conséquent, une partie importante des débats publics portent aujourd'hui sur la nécessité de mettre en place de nouvelles formes de contrôle public : on attend d'eux qu'ils rendent visibles, explicites ou accessibles à tout un chacun des niveaux de décision et d'information qui resteraient sans eux « cachés ». En partant du constat partagé que ces questions demandent une éducation précoce et adaptée à l'environnement contemporain, on réfléchit encore à la manière d'inclure dans l'enseignement un apprentissage au « déchiffrement intellectuel » d'une information complexe, liée à des dispositifs technologiques, dont l'apparente neutralité cache des enjeux politiques et sociétaux. C'est pourquoi la réflexion sur les nombres et l'histoire de leurs usages, si elle concerne d'abord le grand public, intéresse aussi et tout particulièrement les enseignants et formateurs d'enseignants, auxquels une partie des commentaires qui accompagnent les textes présentés ici sont destinés.

### **Une question d'enseignement et de formation**

Un des problèmes que pose la situation contemporaine est bien en effet celui de la formation des futures générations au monde dans lequel ils entrent : pour répondre à cet enjeu, cette formation doit non seulement comprendre des aspects techniques et scientifiques, mais aussi culturels, politiques et éthiques. On l'a vu, en effet, l'usage et le sens des nombres ne renvoient plus seulement à une technicité extérieure à la vie quotidienne, professionnelle ou politique, mais à une part incontournable de notre monde. Être immergé, avant même d'y penser, dans un monde tel que le nôtre pose un problème très simple : quels sont les moyens disponibles à un esprit cultivé pour prendre une distance critique avec ce sur quoi il n'a pas au départ de

recul ? Comment penser en chemin ? Par exemple, n'importe quel élève ou étudiant est aujourd'hui confronté, de manière quasi permanente en France, à l'évaluation chiffrée de ses performances scolaires ou universitaires. Nous savons bien que l'existence même de cette évaluation et son degré d'arbitraire sont pour la plupart d'entre eux un point aveugle ; mieux, nous savons qu'un élève ou qu'un étudiant ne pourra améliorer ses performances qu'au moment où il cessera de fétichiser cette notation. Mais comment le pourrait-il ? Comment l'aider à le faire ?

Ce problème est subtil car il ne revient pas seulement à protéger les jeunes générations d'un monde contemporain qu'on leur présenterait comme potentiellement hostile. Il est bien facile en effet de nous dire les victimes d'un trop plein d'informations, d'un envahissement par les techniques de l'information (ou par les techniques tout court), ou encore d'une « manipulation par les nombres ». Cette victimisation rhétorique fait oublier d'une part que nous sommes aussi les acteurs de cette « manipulation » à chaque fois que nous devons par exemple argumenter, prendre une décision avec leur aide, ou adapter un moyen technologique à nos besoins : c'est nous alors qui faisons des victimes et qui devons les faire. C'est également oublier que l'information chiffrée n'est plus désormais une donnée extérieure à notre monde mais l'un de ses constituants incontournables, quel que soit le secteur d'activité concerné. On pourrait alors dire, en suivant Pascal, que nous sommes embarqués dans cet usage : il s'agit, tout simplement, de notre monde.

Pour faire entrer dans ce monde, le nôtre, tout en gardant cependant une certaine distance critique, l'une des approches à la fois souhaitable et naturelle est l'approche culturelle et historique. En effet, étudier l'histoire en général veut d'abord dire voyager, entrer dans cette terre à la fois familière et étrange que Freud, en appelant subtilement aux ambiguïtés de la langue allemande, appelait *Unheimlichkeit*, le familier-étranger (ou « inquiétante étrangeté » comme on l'a parfois traduit). Voici un fait étrange : les hommes n'ont pas toujours pensé la réalité en termes numériques. Lorsqu'ils ont appris à le faire, en outre, ça n'était pas sans poser des difficultés et problèmes de toutes sortes, qu'ils soient techniques, pratiques, éthiques, philosophiques. Ce sont ces questions qu'il convient de faire découvrir aux jeunes générations, pour qu'ils sachent enfin dans quel monde ils vivent, parce que, longtemps avant eux, on y est entré et non sans difficultés ou questions de toutes sortes. Ce qui rend nécessaire cette approche est le fait que le passé, tout inquiétant qu'il soit et doive être, est effectivement toujours quelque chose de familier, de proche, quelque chose qui reste présent même si cette présence fantomatique n'est pas énoncée. Refaire du passé commun de l'humanité un objet de réflexion présent est l'un des moyens traditionnels par lesquels nous pouvons « accueillir » des jeunes dans un espace partagé, puisqu'il s'agit d'un patrimoine commun que ni eux ni nous n'avons choisi, mais auquel il nous est loisible de réfléchir.

### **L'histoire du « sens des nombres » : une histoire de dispositifs et de modélisations**

Si l'histoire des usages des nombres, et partant de leur sens, est devenue pour nous une nécessité, étudier et comprendre cette histoire longue ne va pourtant pas de soi. En effet, les dispositifs nombreux qui « font » aujourd'hui du nombre n'ont plus de visibilité, alors qu'ils en avaient encore pour ceux de nos ancêtres qui en ont vu la mise en place, précisément en raison du fait que, passée cette mise en place, ils sont très vite devenus « quotidiens » et non questionnés. Comprendre le « sens de nombres » veut donc dire étudier la constitution historique de leur signification dans différents contextes culturels et avant qu'elle ne sombre dans l'oubli des choses muettes car « trop proches ». Pour cela, il faut pouvoir identifier l'élaboration concomitante d'un certain nombre d'outils conceptuels et de dispositifs concrets. Certains de ces outils relèvent d'un côté des techniques d'écriture, de manipulation ou de traitement automatisé des nombres, qui sont dans tous les cas toujours « donnés à penser » sous une forme concrète. D'un autre côté, ces outils relèvent des moyens à la fois concrets et abstraits d'appréhension d'une réalité livrée ou non à l'usage humain. Cette appréhension relève de ce que nous appelons aujourd'hui la « modélisation » de cette réalité.

Le terme de « modélisation », dans son sens strict, est employé pour désigner une démarche scientifique aujourd'hui courante. Cette dernière consiste à élaborer un outil conceptuel, qui peut ou non faire appel aux mathématiques ou à l'informatique, puis à le confronter à la réalité qu'il est sensé à la fois représenter et « simuler ». Le but de cette démarche est d'établir des prédictions correctes sur le futur ou des déterminations de grandeurs qui ne sont pas directement accessibles. Comme le modèle n'est jamais parfaitement adéquat à la réalité, la démarche de modélisation consiste en un va-et-vient entre les deux qui permet de modifier progressivement le modèle, soit pour l'améliorer, soit pour finalement l'abandonner en faveur d'un autre. Le sens du terme s'est aujourd'hui étendu pour désigner un ensemble de démarches et de situations similaires aux démarches scientifiques, mais qui sont applicables à l'enseignement, puisqu'on entend aujourd'hui initier de manière précoce les élèves au va-et-vient dont il était question plus haut. Cet élargissement est probablement une des façons qu'on a trouvées pour penser (et faire penser) à ces « dispositifs invisibles » dont il est question plus haut.

Au niveau des apprentissages les plus « élémentaires », en effet, on a intérêt pour penser une situation réelle (ou donnée comme telle) à utiliser des nombres de plusieurs façons, ou bien à ne pas les utiliser. On peut, par exemple, choisir de mesurer un phénomène, ou de le chiffrer, d'en obtenir la valeur par un calcul, ou d'en représenter la signification par un graphique. Or ce choix n'est pas un simple problème d'usage : à chaque fois, on décide implicitement de donner un certain sens, une certaine valeur au nombre qui, de ce fait, devient indissociable du dispositif qui lui confère ce sens. Donc travailler sur « le sens des nombres », c'est aussi une façon de réfléchir à la formation de celui-ci pour les élèves, à partir des situations dans lesquelles ils sont invités à faire appel à eux par un choix conscient.

Pour toutes ces raisons, nous nous concentrerons donc ici sur une approche historique de la modélisation dans un des ses aspects, à savoir par l'usage des nombres dans des situations concrètes ou qui peuvent l'être. Les nombres seront donc considérés ici non pas « en tant que tels » ou en fonction d'une structure sous-jacente, mais en tant qu'ils mesurent, qu'ils chiffrent, ou qu'ils représentent quelque chose. Ce choix est motivé par deux autres raisons particulières, qui s'ajoutent aux raisons générales données ci-dessus.

### **La question du sens des nombres est pluridisciplinaire par essence**

On l'a vu plus haut, l'histoire des nombres et du sens qu'ils prennent dans un contexte d'usage, à chaque fois en fonction de certains dispositifs, intéresse à la fois le grand public et celui des enseignants qui doivent redéfinir et en quelque sorte « renégocier » les questions qui se posent dans la société au niveau des apprentissages scolaires. Or les deux questions de l'usage des nombres dans des situations élémentaires de modélisation, d'un côté, et de l'élaboration de leur concept par ces usages, de l'autre, sont pluridisciplinaires par essence. Les raisonnements et démarches sous-jacentes à cette histoire, qu'ils soient étudiés en effet à titre historique ou dans un contexte scolaire, relèvent-ils des mathématiques, de l'informatique, des sciences expérimentales, de l'économie, de la démographie, de la technique ? Il est souvent difficile de le dire car les démarches visées forment un tout complexe et cohérent, qui relève le plus souvent de plusieurs de ces domaines en même temps. La question de savoir de quelle discipline ces démarches relèvent n'a de sens que dans une situation historique où coexistent des disciplines séparées les unes des autres. Or cette situation institutionnelle n'est vieille en gros que d'un siècle et demi au mieux : ce qui nous apparaît évident, en raison de notre formation, apparaît plutôt comme une exception au regard de l'histoire plurimillénaire des sciences et des techniques .

Une approche historique permet du même coup de réfléchir à cet aspect des questions soulevées, dans la mesure où la plus grosse partie des démarches que nous présenterons ici ont été élaborées dans un contexte où nos divisions disciplinaires modernes n'existaient tout simplement pas. En outre, beaucoup de ces documents rendent explicites le contexte culturel, social économique dans lesquels ils s'insèrent : aussi le lien à l'histoire générale apparaît-il très clairement. Par conséquent, les documents présentés sont autant de supports d'activités interdisciplinaires possibles, non seulement pour les professeurs de sciences expérimentales et de mathématiques, mais encore pour des enseignants d'histoire et de lettres. Les professeurs de philosophie y trouveront matière à réflexion dans la mesure où les questions soulevées ci-dessus font parties des problèmes que pose l'appréhension savante du réel en général.

### **Une question d'actualité pour la recherche en histoire**

La seconde raison du choix que nous avons fait ici est que les questions touchant aux usages des nombres ainsi qu'aux dispositifs qui les engendrent sont devenues assez récemment des questions très travaillées et débattues dans la recherche historique en général et en histoire des sciences en particulier . Le temps n'est plus, où l'on accordait une attention distraite aux calculs marchands, aux statistiques non mathématisées du début du XIXe siècle, ou encore aux documents révélant le calcul scolaire dans l'Antiquité. Jusque dans les années soixante-dix, on considérait facilement que ces questions ne relevaient pas de l'histoire des sciences qui paraissait alors légitime, c'est-à-dire celle qui décrivait les théories les plus avancées ou les plus sophistiquées d'une époque. Aujourd'hui, on considère au contraire que ces questions sont au contraire cruciales pour comprendre en profondeur certains développements intellectuels. Cette évolution est due pour l'essentiel à l'ouverture du domaine lui-même à l'histoire générale ainsi qu'à la sociologie des sciences . La richesse du matériel historique ainsi exhumé et étudié depuis plusieurs décennies n'est pas toujours bien connue : aussi ce volume est-il aussi conçu pour rendre accessible une petite partie des documents dont les historiens ont saisi et dégagé l'intérêt. Par ailleurs, certains des textes présentés ici n'ont pas fait l'objet de recherches historiques suffisamment approfondies. Nous les avons volontairement sélectionnés à titre d'initiation pour ceux de nos lecteurs qui s'intéressent à ces recherches ou pourraient le faire, notamment les étudiants, enseignants, ou les deux, qui seraient intéressés à participer à ces recherches. Cette dimension du présent ouvrage fait également une de ses originalités, puisque la

problématique générale exposée ici, ainsi que les problématiques particulières présentées dans chaque partie (dans leurs introductions aussi bien que dans les commentaires de chaque texte), sont le résultat d'un travail de préparation qui s'est largement confondu, pour les auteurs, avec un travail de recherche. En termes concrets, ce travail était donc évolutif et progressif, ponctué par des rencontres en forme de « remue-méninges » qui jouaient de fait le rôle de séminaires, et constitué de patientes réécritures d'un argumentaire au départ très différent de ce qu'il est devenu aujourd'hui. Nous ne prétendons pas que les recherches qu'on trouvera ainsi consignées dans ce produit final soient toutes originales au regard de la littérature existante sur chacun des sujets abordés. Par contre, elles ont représenté pour nous, une aventure intellectuelle qui ne diffère pas fondamentalement d'un travail de recherche. Pour cette même raison, nous considérons qu'il reste et doit rester, de ce point de vue, une esquisse qu'il nous sera loisible de réélaborer. Nous espérons que ce caractère évolutif et exploratoire, qui garde à cet ouvrage le caractère d'un « work in progress », sera sensible au lecteur intéressé à une telle démarche ou souhaitant s'y initier. À titre d'universitaires, nous projetons d'ailleurs pérenniser l'expérience sur de nouveaux ouvrages, en y associant cette fois-ci des étudiants.

## Organisation de l'ouvrage

La problématique que nous avons décrite ci-dessus étant assez vaste, il a fallu bien sûr choisir des questions particulières qui illustraient ce propos général. Ce volume comporte donc deux grandes parties, la première consacrée aux nombres en tant qu'ils sont impliqués dans une opération de mesure, qu'il s'agisse de mesurer des grandeurs courantes (comme des longueurs inaccessibles ou des distances angulaires) ou des grandeurs plus élaborées (comme celle de masse, dont le concept a été profondément modifié après les travaux de Newton). Dans cette partie, on veut faire entendre que, depuis la plus haute antiquité, ce que nous appelons ici le « registre métrologique », c'est-à-dire le contexte dans lequel des nombres sont utilisés dans une opération de mesure, est source d'un certain nombre de raisonnements qui sont à la fois explicites, riches et qui relèveraient aujourd'hui d'une opération de modélisation de la réalité. Dans la seconde partie, nous nous intéressons aux nombres en tant qu'ils permettent d'estimer quantitativement une réalité sociale, économique ou humaine. Il s'agit ici de faire entendre, ici aussi, à quel point les données numériques qui rendent compte de ces réalités très particulières ont fait l'objet d'une construction très progressive ; que le principe même de cette construction n'a pas été sans débats très virulents ; enfin et par conséquent, qu'il pose des problèmes éthiques auxquels il faut réfléchir.

Du point de vue de sa présentation concrète, le volume est pour l'essentiel un recueil de textes originaux traduits (le cas échéant) et longuement présentés. Sauf exception, la plupart de ces textes sont accessibles dans leur intégralité, pour beaucoup d'entre eux en ligne. Ce choix était délibéré, car ces lectures d'extraits doivent servir dans notre esprit à introduire des lectures plus étendues. À l'inverse, une partie importante de notre travail a consisté à choisir les extraits qui nous semblaient pertinents en fonction des nouvelles questions que nous avons développées ou découvertes au fur et à mesure de notre travail. Chaque partie comporte ainsi cinq ou six textes qui sont ordonnés d'un point de vue à la fois chronologique et thématique, suivant une problématique exposée dans l'introduction et qui sert de « fil rouge » à chacun des commentaires particuliers. La présentation de chaque texte poursuit plusieurs objectifs. La présentation historique vise à restituer dans ses grandes lignes le contexte du document présenté, le corpus dans lequel il prend place, son usage ancien, et son intérêt historique. Elle est destinée à bien faire comprendre certains éléments indispensables à la compréhension du document ou bien qui sont simplement intéressants culturellement. Le cas échéant, elle donne aussi une idée des questions de recherche que posent de tels documents, dans l'esprit général indiqué plus haut. La présentation pédagogique intéresse plus particulièrement les enseignants, les étudiants qui se préparent à l'être, enfin les formateurs d'enseignants : elle explique l'intérêt du document et ses enjeux, que ce soit pour approfondir tel ou tel aspect de l'enseignement ou pour nourrir la compréhension de notions et méthodes scientifiques dans un contexte culturel « large ». Dans cette partie on suggère quelques pistes pour utiliser ces textes (ou simplement s'en inspirer) dans la construction de séances d'enseignement et/ou de formation. Cette présentation n'a aucune ambition prescriptive ou concrète, au sens qu'elle ne propose aucune activité « clés en main » aux lecteurs, cela pour deux raisons. D'une part, nous n'avons pas eu matériellement le temps d'associer, au cours du travail éditorial, un travail d'expérimentation pédagogique à l'étude et la sélection des extraits choisis. D'autre part et plus profondément, nous considérons que ce n'était pas ici notre rôle de prescrire des modalités détaillées d'exploitation, dont la définition revient à chaque enseignant et n'est jamais la même d'un individu à l'autre, mais de les suggérer en fonction de l'analyse des textes et de notre propre expérience d'enseignement ou de formation. Une bibliographie contenue dans les notes des deux commentaires propose enfin quelques lectures accessibles (sur papier ou en ligne) afin de prolonger la réflexion sur un document donné. Les références aux ouvrages mentionnés sont toutes regroupées en fin d'ouvrage, et comme pour les textes eux-mêmes, nous avons systématiquement signalé ceux qui étaient lisibles en ligne ou téléchargeables.